פתרון

מבחן בחדו"א 1מ' (104010) 18.10.04

קיץ-מועד ב' / אביב-מועד ג' תשס"ד

שאלה 1:

הוכח על פי ההגדרה בלבד:

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ונתון כי b_n היא סדרה מתכנסת לגבול סופי, אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 0$.

תשובה:

יהי $\varepsilon > 0$ מספר כלשהו.

$b_n \to L$ ולכן קיים n_1 כך שלכל $n \ge n_1$ מתקיים $L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$.

נסמן $M = \max\{|L-\varepsilon|, |L+\varepsilon|\}$ ואז לכל $n \ge n_1$ מתקיים $|b_n| \le M$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ לכן קיים n_2 כך שלכל $n \ge n_2$ מתקיים $a_n > \frac{M}{\varepsilon} > 0$ כלומר $|a_n| > \frac{M}{\varepsilon}$.

נסמן $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

מכאן שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $\left|\frac{b_n}{a_n}\right| < \frac{M}{M/\varepsilon} = \varepsilon$ וזה מש"ל.

שאלה 2:

נתון כי $\lim_{x\to\infty} a_n = 0$. הוכח כי קיימת לה תת סדרה a_{n_k} כך שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ מתכנס.

תשובה:

נתון כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon$.

נקח $\varepsilon = \frac{1}{k^2}$. לכל k קיים n_k כך שלכל $n \ge n_k$ מתקיים $|a_n| < \frac{1}{k^2}$.

לכל k מתקיים $|a_{n_k}| < \frac{1}{k^2}$.

הטור $\sum \frac{1}{k^2}$ מתכנס ולפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים, גם הטור $\sum |a_{n_k}|$ מתכנס.

מאחר שכל טור שמתכנס בהחלט מתכנס גם בעצמו, אז גם הטור $\sum a_{n_k}$ מתכנס.

שאלה 3:

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b). הוכח כי f מונוטונית עולה בקטע אם ורק אם $f'(x) \ge 0$ לכל x בקטע.

תשובה:

כיוון 1:

נתון כי f גזירה וכי f מונוטונית עולה בקטע (a,b).

תהי x נקודה כלשהי בקטע.

נחשב נגזרת חד צדדית של f בנקודה x: $f_+'(x) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

מאחר ש $h > 0$ ו- f מונוטונית עולה, אזי גם המונה וגם המכנה בביטוי האחרון חיוביים ומכאן נובע כי $f_+'(x) \ge 0$.

המשך בעמוד הבא

f גזירה בנקודה x ולכן $f'(x) = f_+'(x)$ ולכן $f'(x) \geq 0$ לכל x בקטע (a,b).

<u>כיוון 2:</u>

נתון כי f גזירה וכי $f'(x) \geq 0$ לכל נקודה בקטע (a,b).

תהיינה x, y שתי נקודות בקטע (a,b) ונניח כי $x < y$.

מהנתון נובע כי f רציפה בקטע $[x,y]$ וגזירה בקטע (x,y)

ולכן ממשפט לגרנז', קיימת נקודה c בקטע (x,y) שבה $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$.

c שייכת גם לקטע (a,b) שבו נתון כי $f'(x) \geq 0$ לכל x.

לכן גם $f'(c) \geq 0$ ולכן $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$.

המכנה בבטוי האחרון חיובי ממש, ולכן גם המונה חיובי, כלומר, f מונוטונית עולה בקטע.

<u>שאלה 4:</u>

נניח כי $f:[0,1] \to [0,1]$ פונקציה רציפה. הראו כי קיים $c \in [0,1]$ המקיים $f(c) = \cos\frac{\pi c}{2}$.

<u>תשובה:</u>

נתבונן בפונקציה $g(x) = f(x) - \cos\frac{\pi x}{2}$ שגם היא פונקציה רציפה, כהפרש של פונקציות רציפות,

ונחפש נקודה $c \in [0,1]$ שבה $g(c) = 0$.

נתון כי הטווח של f הוא הקטע $[0,1]$, מכאן ש $0 \leq f(x) \leq 1$ לכל $0 \leq x \leq 1$.

$g(0) = f(0) - 1$ ולכן $-1 \leq g(0) \leq 0$.

$g(1) = f(1)$ ולכן $0 \leq g(1) \leq 1$.

אם $g(0) = 0$ או $g(1) = 0$, אזי סיימנו כי מצאנו נקודה $c \in [0,1]$ שבה $g(c) = 0$.

אחרת, אם שניהם שונים מאפס, ברור כי $g(0) < 0$ ו- $g(1) > 0$.

קיבלנו ש- g היא פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$, המקיימת $g(0) \cdot g(1) < 0$, לכן, ממשפט שלמדנו,

קיימת נקודה c בתוך הקטע $(0,1)$ שבה $g(c) = 0$, וזה מש"ל (או שהנקודה באחד הקצוות או שהיא בפנים, כלומר $c \in [0,1]$).

<u>שאלה 5:</u>

נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$.

א. חשב את $f'(0)$ אם קיימת, או הוכח שאינה קיימת.

ב. מצא נקודת פיתול של הפונקציה בקטע $(0,\infty)$.

<u>תשובה:</u>

א. את $f'(0)$ ניתן לחשב רק באמצעות ההגדרה, כי היא מוגדרת שונה משני צידי הנקודה.

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{e^{-1/h}-0}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1/h}{e^{1/h}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underset{\text{לופיטל}}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{-1/h^2}{-1/h^2e^{1/h}}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{e^{1/h}}=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{0-0}{h}=0$$

הנגזרות החד צדדיות בנקודה 0 קיימות ושוות ולכן הפונקציה גזירה שם וגם $f'(0)=0$.

ב. בתחום המבוקש $f(x)=e^{-1/x}$. נחשב את הנגזרת השניה:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{x^3}e^{-1/x}+\frac{1}{x^4}e^{-1/x}$$

הפתרון היחיד של $f''(x)=0$ בתחום $(0,\infty)$ הוא $x=\frac{1}{2}$,

שם הנגזרת השניה מחליפה סימן ולכן יש שם לפונקציה נקודת פיתול.

<u>שאלה 6:</u>

מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $y=(x^2+1)(x^2-4)$ בקטע $[1,2]$.

<u>תשובה:</u>

מקסימום ומינימום גלובלי מתקבלים בנקודות קריטיות או בקצה הקטע.

בקצוות: $y(1)=2\cdot(-3)=-6,\quad y(2)=5\cdot 0=0$

נקודות קריטיות:

$$y'=2x(x^2-4)+(x^2+1)\cdot 2x=2x(2x^2-3)$$

$y'=0$ כאשר $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. $x=0,\quad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ מכולם רק $x=+\sqrt{\frac{3}{2}}$ בתחום.

מתקיים: $y\left(\sqrt{3/2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-6.25$

מכל הנקודות שבדקנו, הערך המקסימלי הוא 0

והערך המינימלי הוא -6.25 .

<u>שאלה 7:</u>

מצא פונקציה $F(x)$ הרציפה לכל $x\ge -1$, אם נתון כי

$$F'(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ \frac{1}{1+x^2} & x>1\end{cases}$$, ו- $F(0)=\frac{1}{2}$.

<u>תשובה:</u>

כדי למצוא את $F(x)$ נחשב תחילה את הפונקציות הקדומות של שתי הפונקציות הנתונות:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

נציב $x=\sin t,\quad dx=\cos t\,dt$ ואז

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{\sin\left(2\arcsin x\right)}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)=$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

והפונקציה השניה: $\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+D$

קיבלנו בסך הכל כי:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C & -1\le x\le 1\\ \arctan x+D & x>1\end{cases}$$

מהתנאי $F(0)=\frac{1}{2}$ נובע כי (מהשורה העליונה) $C=\frac{1}{2}$.

מהתנאי לרציפות נובע כי $F(1+)=F(1-)$ ולכן

$$\frac{1}{2}\arcsin 1+\frac{1}{2}=\arctan 1+D\quad\Rightarrow\quad\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+D\quad\Rightarrow\quad D=\frac{1}{2}$$

<u>שאלה 8:</u>

מצאו עבור אילו ערכים של α מתכנס האינטגרל $\int_0^1\frac{dx}{\left(1-x^4\right)^\alpha}$, ועבור אילו ערכים של α הוא מתבדר.

<u>תשובה:</u>

מתקיים

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\left(1-x^4\right)^\alpha}}{\frac{1}{(1-x)^\alpha}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-x^4\right)^\alpha}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(1-x)^\alpha}}{\cancel{(1-x)^\alpha}\left(1+x\right)^\alpha\left(1+x^2\right)^\alpha}=\frac{1}{2^\alpha\cdot 2^\alpha}=L$$

המספר שמתקבל כתוצאה מקיים $0<L<\infty$,

לכן ממשפט ההשוואה הגבולי, האינטגרל הנתון והאינטגרל $\int_0^1\frac{dx}{\left(1-x\right)^\alpha}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

לכן האינטגרל הנתון מתכנס עבור $\alpha<1$ ומתבדר עבור $\alpha\ge 1$.

<u>שאלה 9:</u>

א. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$.

ב. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n-\left(-1\right)^n}}$, (הדרכה: חשב את S_{2n}).

<u>תשובה:</u>

א. הטור אינו מתכנס כי $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1$ ואיננו אפס, והטור איננו מקיים תנאי הכרחי להתכנסות טורים.

ב. חישוב S_{2n}:

$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k-1}+a_{2k}\right)$ ולכן

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{2k-1}}{\sqrt{2k-1-(-1)^{2k-1}}}+\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2k-(-1)^{2k}}}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{\sqrt{2k}}+\frac{1}{\sqrt{2k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}}{\sqrt{2k}\sqrt{2k-1}}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-2k+1+2k}{\sqrt{2k}\sqrt{2k-1}\left(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}\right)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k-1}\left(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}\right)}\right)=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

הטור האחרון מתכנס כי מתקיים $\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{\frac{1}{(2k)^{3/2}}}=1$ ולכן הוא והטור $\sum\frac{1}{k^{3/2}}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד, והטור האחרון מתכנס.

קיבלנו ש $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$ (מתכנס)

וידוע כי $S_{2n}=S_{2n-1}+a_{2n}$ ולכן $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}+\lim_{n\to\infty}a_{2n}$

אבל $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{2n-(-1)^{2n}}}=0$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות נובע כי

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$ ומכאן נובע כי גם $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ ומכאן שהטור מתכנס (בתנאי).

<u>שאלה 10:</u>

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{\sin^n x}{n}$ מתכנסת במידה שווה בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$?

ב. האם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n}$ מתכנס במידה שווה בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$?

<u>תשובה:</u>

א. תחילה נחשב את פונקצית הגבול של הסדרה הנתונה:

לכל x (ובפרט בקטע הנתון) מתקיים: $L(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^n x}{n}=0$.

לכן ההפרש בין הסדרה לבין גבולה הוא הסדרה עצמה: $r_n(x)=\frac{\sin^n x}{n}$

מתקיים $\sup_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\left|r_n(x)\right|=\sup_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\left|\frac{\sin^n x}{n}\right|=\frac{1}{n}$

ואילו $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\left|r_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

ומתקיים תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות במידה שווה.

ב. נתבונן בנקודה $x=\frac{\pi}{2}$. שם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ והטור מתבדר. אם הטור מתבדר בנקודה מסוימת בתחום, אזי הוא אינו מתכנס שם ובודאי שאיננו מתכנס במידה שווה.

<u>שאלה 11:</u>

א. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$? מהו תחום ההתכנסות שלו?

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$?

<u>תשובה:</u>

א. נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$.

אזי $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

ומכאן $\int_0^x g(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\int_0^x t^{n-1}dt\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n$

ולכל $|x|<1$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

בסך הכל קיבלנו כי: $\int_0^x g(t)dt=\frac{x}{1-x}$

מכאן $g(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$

ומכאן $f(x)=xg(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

תחום ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ הוא $(-1,1)$, ואילו הטור שלנו הוא נגזרת שלו, ותחום ההתכנסות שלו אינו שונה, ממשפט הידוע לנו על תחום ההתכנסות של טורי חזקות.
(אפשר גם לומר שרדיוס ההתכנסות זהה, ולהראות שהטור הספציפי הנתון מתבדר בקצוות).

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ מתכנס כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0<1$$

ולכן לפי מבחן המנה הטור מתכנס.

למציאת הסכום נתבונן בטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ שסכומו הוא e^x.

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}-1=e^2-1$.